

Mediaciones hipermediales para el desarrollo del pensamiento variacional en educación secundaria

Hypermedia Mediations for Developing Variational Thinking in Secondary Education

Franco-Medina, Héctor Edinson¹

ORCID: <https://orcid.org/0009-0005-9836-4375>

Email: hector.francom@gmail.com

Resumen

El pensamiento variacional constituye un componente esencial de la educación matemática al favorecer la comprensión de las relaciones entre cantidades y sustentar el aprendizaje de funciones, modelación y tasa de cambio. El objetivo de esta revisión sistemática fue analizar las mediaciones hipermediales empleadas para fortalecer el pensamiento variacional en estudiantes de educación secundaria, identificando los resultados de aprendizaje y las condiciones pedagógicas asociadas con su efectividad. La investigación se desarrolló siguiendo las directrices PRISMA 2020 mediante la consulta de ERIC, SciELO, Dialnet, Redalyc, SpringerLink. De 111 registros identificados, 35 documentos fueron evaluados en texto completo y 16 publicaciones, correspondientes a 13 estudios independientes, cumplieron los criterios de inclusión. La calidad metodológica se valoró con el “Mixed Methods Appraisal Tool” (MMAT). Los resultados evidenciaron que GeoGebra, la realidad aumentada, el video análisis, los manipuladores virtuales y otros entornos digitales favorecen la articulación entre representaciones matemáticas cuando se integran con actividades de predicción, modelación y retroalimentación docente. Los mayores avances se observaron en el razonamiento covariacional, la comprensión de la tasa de cambio y la coordinación de múltiples representaciones. Se concluye que estas mediaciones fortalecen el pensamiento variacional cuando forman parte de propuestas didácticas planificadas y contextualizadas.

Palabras clave: pensamiento variacional; razonamiento covariacional; hipermedia; educación secundaria; revisión sistemática.

Abstract

Variational thinking is an essential component of mathematics education, fostering an understanding of the relationships between quantities and supporting the learning of functions, modeling, and rates of change. The objective of this systematic review was to analyze the hypermedia resources used to strengthen variational thinking in secondary school students, identifying learning outcomes and the pedagogical conditions associated with their effectiveness. The research was conducted following the PRISMA 2020 guidelines by consulting ERIC, SciELO,

¹ Candidato a Doctor en Educación. Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Instituto Pedagógico de Caracas.

Dialnet, Redalyc, SpringerLink. Of the 111 records identified, 35 documents were evaluated in full text, and 16 publications, corresponding to 13 independent studies, met the inclusion criteria. Methodological quality was assessed using the Mixed Methods Appraisal Tool (MMAT). The results showed that GeoGebra, augmented reality, video analysis, virtual manipulatives, and other digital environments promote the articulation of mathematical representations when integrated with activities involving prediction, modeling, and teacher feedback. The greatest progress was observed in covariational reasoning, understanding the rate of change, and coordinating multiple representations. It is concluded that these tools strengthen variational thinking when they are part of planned and contextualized teaching approaches.

Keywords: variational thinking; covariational reasoning; hypermedia; secondary education; systematic review.

Introducción

Comprender la variación implica reconocer qué cantidades cambian, establecer cómo se relacionan y explicar la intensidad con la que una modificación acompaña a otra. Thompson y Carlson (2017) vinculan este razonamiento con la construcción de imágenes mentales de variación y covariación; por esta razón, constituye una base para interpretar funciones, modelar fenómenos y aproximarse a la tasa de cambio sin reducirla a un procedimiento algebraico.

En la educación secundaria, la enseñanza de funciones continúa asociada con frecuencia a reglas de correspondencia, sustitución numérica y trazado de curvas. Tal orientación limita las oportunidades para que el estudiante explique por qué una gráfica adopta determinada forma, diferencie una tasa constante de otra variable y coordine el comportamiento simultáneo de dos magnitudes (Kafetzopoulos & Psycharis, 2022; Pittalis & Sajka, 2026).

Los lineamientos curriculares colombianos conceden al pensamiento variacional una función transversal y lo relacionan con patrones, dependencia, cambio y generalización. El Ministerio de Educación Nacional (1998, 2006) propone abordar estas ideas mediante problemas cercanos a la experiencia del alumnado y diversos sistemas

de representación, aunque su desarrollo escolar todavía depende de la preparación docente, la continuidad de las secuencias y los recursos disponibles.

Las tecnologías digitales amplían las oportunidades para manipular parámetros, observar procesos y recibir retroalimentación en tiempo real; con todo, el dispositivo carece de valor didáctico cuando la actividad no dirige la atención hacia las relaciones matemáticas. Clark-Wilson et al. (2020) explican que el aprendizaje depende de la articulación entre herramienta, tarea, conocimiento disciplinar y acción docente, relación que impide equiparar innovación con novedad técnica.

En esta revisión, la mediación hipermedial comprende ambientes que integran de forma interactiva texto, imagen, animación, audio, video, datos y objetos matemáticos dinámicos. La definición incluye geometría dinámica, realidad aumentada, videoanálisis, manipuladores virtuales y experiencias digitales corporales, siempre que la combinación de modos intervenga en la comprensión del cambio y no permanezca como acompañamiento decorativo.

La coordinación de representaciones ofrece el fundamento cognitivo de estas mediaciones. Duval (2006) diferencia los tratamientos realizados dentro de un registro de las conversiones entre lenguaje natural, tablas,

gráficas y expresiones; a su vez, Radford (2006) muestra que gesto, artefacto y lenguaje participan conjuntamente en la objetivación matemática. En los entornos dinámicos, una variación puede propagarse entre registros y hacer visible una dependencia difícil de apreciar en una secuencia estática.

La literatura reciente reúne intervenciones escolares con TIC, modelación apoyada en GeoGebra, realidad aumentada y diseños corporales interactivos. Sin embargo, la diversidad de niveles, recursos y estrategias dificulta determinar qué mecanismos se repiten, cuáles aprendizajes cuentan con respaldo suficiente y qué condiciones deben considerar instituciones como las de Puente Nacional, Santander, donde la conectividad y el acceso a equipos varían entre sedes.

A partir de esta necesidad, el objetivo consistió en analizar las mediaciones hipermediales y las estrategias didácticas reportadas para promover el pensamiento variacional, funcional o covariacional en educación secundaria, junto con sus resultados y condiciones de implementación. La pregunta de revisión fue: ¿qué mediaciones, estrategias, resultados de aprendizaje y condiciones de aplicación comunican la evidencia empírica publicada entre 2018 y 2026?

Metodología

Se realizó una revisión sistemática de estudios empíricos conforme a las directrices establecidas por la declaración PRISMA 2020 (Page et al., 2021), complementadas con los criterios de transparencia propuestos por PRISMA-S para el reporte de estrategias de búsqueda bibliográfica (Rethlefsen et al., 2021). Como etapa previa al proceso de identificación de la evidencia, se definieron la pregunta de revisión, las fuentes de información, los criterios de elegibilidad, las variables de extracción y el procedimiento para la valoración metodológica de los estudios incluidos. Aunque se elaboró un protocolo de trabajo que orientó todas las fases de la

revisión, este no fue registrado en una plataforma pública.

La estrategia de búsqueda comprendió publicaciones difundidas entre el 1 de enero de 2018 y el 30 de junio de 2026. Para ello se consultaron las bases de datos ERIC, SciELO, Dialnet, Redalyc y SpringerLink, complementando posteriormente la recuperación de literatura mediante rastreo retrospectivo de referencias bibliográficas y búsquedas dirigidas por autor y título en portales editoriales. Esta estrategia permitió ampliar la cobertura documental y reducir el riesgo de omitir investigaciones potencialmente relevantes para el objetivo del estudio.

Las ecuaciones de búsqueda se construyeron en español e inglés a partir de los términos “pensamiento variacional”, “razonamiento covariacional”, “pensamiento funcional”, “variational thinking”, “covariational reasoning” y “functional thinking”, combinados con expresiones relacionadas con mediaciones digitales, entre ellas “hipermedia”, TIC, GeoGebra, realidad aumentada, “digital”, “dynamic representations”, “embodied”, “video analysis”, secundaria, bachillerato, “middle school” y “high school”. La articulación de estos descriptores mediante los operadores booleanos AND y OR, junto con el empleo de comillas y filtros cronológicos, se ajustó a las particularidades sintácticas de cada fuente consultada con el propósito de optimizar la sensibilidad y la precisión de la búsqueda.

Los criterios de inclusión contemplaron artículos arbitrados y actas científicas que reportaran datos empíricos originales, desarrollados con estudiantes de sexto a undécimo grado, o con edades aproximadas entre los 12 y los 18 años, e incorporaran una intervención digital, hipermedial, multimodal o corporal vinculada explícitamente con procesos de variación, covariación, función o modelación funcional. Por el contrario, se excluyeron revisiones de literatura, propuestas didácticas sin aplicación empírica,

investigaciones realizadas en educación primaria o superior y estudios cuya información metodológica resultó insuficiente para valorar su calidad. Los trabajos de carácter exclusivamente teórico fueron considerados como apoyo para la interpretación de los resultados, aunque no hicieron parte del corpus empírico analizado.

El proceso de selección se desarrolló de manera secuencial mediante la eliminación de registros duplicados, la revisión de títulos y resúmenes, la lectura crítica de los textos completos y la verificación definitiva de los criterios de elegibilidad. Para efectos de la síntesis, cada documento se consideró una publicación independiente, mientras que la unidad analítica correspondió al estudio empírico. En aquellos casos en que diferentes publicaciones compartían la misma muestra, las tareas implementadas y el período de recolección de datos, estas fueron integradas en un único estudio con el fin de evitar la sobreestimación de la evidencia disponible.

La extracción de información se efectuó mediante una matriz diseñada para registrar la autoría, el año de publicación, el país, el grado escolar, el tamaño de la muestra, la duración de la intervención, el diseño metodológico, la tecnología empleada, las tareas propuestas, los sistemas de representación utilizados, las

Tabla 1.

Criterios de elegibilidad de la revisión sistemática

Componente	Inclusión	Exclusión
Población	Estudiantes de 6.º a 11.º o edades aproximadas de 12 a 18 años; docentes cuando su actuación se vinculó directamente con el aprendizaje estudiantil.	Primaria, educación superior o formación docente sin aplicación en secundaria.
Interés	Mediación digital, hipermedial, multimodal o corporal interactiva aplicada a variación, covariación, funciones o modelación funcional.	Tecnología accesoria o contenido matemático sin procesos de variación, dependencia o coordinación de cantidades.
Resultados	Razonamiento variacional o covariacional, pensamiento funcional, fluidez representacional, modelación, tasa de cambio o comprensión gráfica.	Motivación o rendimiento general sin evidencia relacionada con el objeto de revisión.
Diseño	Estudio empírico cualitativo, cuantitativo o mixto; artículo arbitrado o acta científica; español o inglés; 2018-2026.	Revisión, ensayo, propuesta no implementada, tesis no publicada o reporte metodológicamente insuficiente.

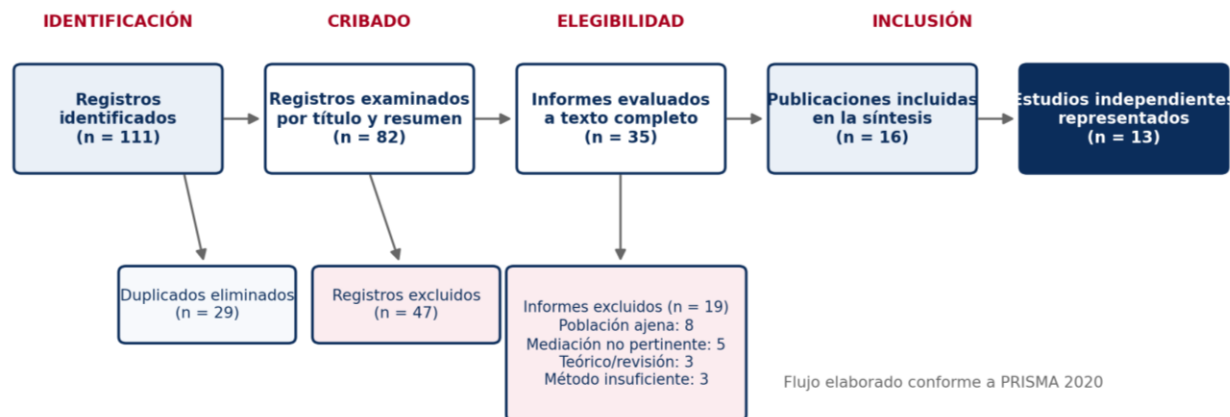
Nota. . Los criterios se aplicaron al texto completo cuando el título y el resumen no permitieron adoptar una decisión. Los referentes teóricos empleados para interpretar los resultados no fueron contabilizados como estudios incluidos.

actuaciones docentes, las evidencias generadas, los resultados matemáticos y las limitaciones identificadas por los autores. Con el propósito de garantizar la fidelidad de los datos, cada registro fue contrastado con el texto completo o, cuando fue necesario, con la información disponible en la página editorial correspondiente. Los datos ausentes se conservaron como “no especificados”, evitando incorporar inferencias que carecieran de respaldo documental.

La calidad metodológica de los estudios incluidos se examinó mediante el “Mixed Methods Appraisal Tool” (MMAT), versión 2018 (Hong et al., 2018). En lugar de calcular una puntuación global, la valoración se orientó hacia el análisis de la coherencia entre la pregunta de investigación y el método empleado, la pertinencia de las estrategias de muestreo, la calidad de la información recopilada, la trazabilidad del proceso analítico y la correspondencia entre la evidencia presentada y las interpretaciones formuladas por los autores. Con base en estos criterios se estableció un nivel de confianza alto, medio o limitado para cada estudio, el cual sirvió como referente para ponderar la interpretación de los hallazgos.

Figura 1.

Diagrama de flujo de identificación, cribado, elegibilidad e inclusión



Nota. Síntesis del proceso de selección.

Resultados

La estrategia de búsqueda permitió identificar 111 registros. Tras la eliminación de 29 documentos duplicados, se examinaron los títulos y resúmenes de 82 publicaciones potencialmente elegibles. Posteriormente, 35 documentos fueron sometidos a evaluación en texto completo, de los cuales 19 se excluyeron por corresponder a poblaciones diferentes del nivel educativo establecido ($n = 8$), no incorporar una mediación compatible con el objetivo de la revisión ($n = 5$), presentar un enfoque exclusivamente teórico o de revisión ($n = 3$) o carecer de información metodológica suficiente para valorar su calidad ($n = 3$). En consecuencia, la síntesis final quedó conformada por 16 publicaciones que representaron 13 estudios empíricos independientes.

La diferencia entre el número de publicaciones y el de estudios respondió a la existencia de programas de investigación cuyos resultados fueron difundidos en más de un artículo, ya fuera para reportar distintas fases de la intervención o análisis complementarios derivados de un mismo conjunto de datos. Esta situación se observó principalmente en investigaciones sobre realidad aumentada y

entornos digitales basados en el movimiento corporal. Con el propósito de preservar la independencia analítica del corpus, estos trabajos fueron integrados como un único estudio, evitando que una misma experiencia incrementara artificialmente la frecuencia de los hallazgos.

La producción científica mostró un crecimiento sostenido durante los últimos años del período analizado. En efecto, once de las dieciséis publicaciones fueron divulgadas entre 2023 y 2026, mientras que las cinco restantes correspondieron al intervalo comprendido entre 2018 y 2022. Desde la perspectiva geográfica, Colombia aportó tres investigaciones centradas en intervenciones escolares, laboratorios de aprendizaje y propuestas que combinaron recursos físicos y virtuales. Los demás estudios procedieron de China, Alemania, Estados Unidos, Grecia, Israel, Italia, México, Países Bajos y equipos internacionales, panorama que refleja una participación latinoamericana aún limitada en el desarrollo de investigaciones relacionadas con realidad aumentada, interfaces corporales y otras mediaciones hipermediales emergentes.

En cuanto a los enfoques metodológicos, predominaron los estudios cualitativos, las

investigaciones basadas en diseño, los experimentos de enseñanza y los proyectos de investigación-acción. Las muestras oscilaron entre estudios intensivos desarrollados con tres o cuatro participantes y experiencias implementadas con más de un centenar de estudiantes. Esta diversidad metodológica enriqueció la comprensión de los procesos de aprendizaje y de las interacciones generadas por las diferentes tecnologías; no obstante, también redujo la posibilidad de establecer comparaciones directas sobre la magnitud de sus efectos debido a la heterogeneidad de los contextos, las tareas y los diseños de investigación.

La evaluación de la calidad metodológica indicó que diez publicaciones alcanzaron un

nivel de confianza alto, cinco se clasificaron con confianza media y una obtuvo confianza limitada. Los estudios mejor valorados describieron con claridad sus unidades de análisis, integraron múltiples fuentes de evidencia como producciones estudiantiles, registros audiovisuales, entrevistas y mediciones pre y post intervención y sustentaron sus interpretaciones en episodios empíricos claramente documentados. En contraste, las principales limitaciones se relacionaron con el uso de muestras de conveniencia, la corta duración de las intervenciones, la escasa presencia de grupos de comparación y la insuficiente descripción de las decisiones pedagógicas adoptadas por el profesorado durante el desarrollo de las experiencias.

Tabla 2.

Características y hallazgos principales de las publicaciones incluidas

Estudio	Contexto y participantes	Diseño y mediación	Hallazgo principal
Martínez-López y Gualdrón-Pinto (2018)	Colombia; 9.º; población de 142 estudiantes	Investigación-acción; ocho secuencias con pizarra digital, tabletas y presentaciones	Mejoras en comunicación, razonamiento y resolución de problemas variacionales.
Ordóñez-Ortega et al. (2019)	Colombia rural; 8.º; n = 39	Investigación-acción; baldosas algebraicas y manipulador virtual durante cuatro meses	Articulación de representaciones verbal, geométrica y algebraica.
Basu y Panorkou (2019)	Estados Unidos; tres aulas de 6.º	Experimento de diseño; simulaciones NetLogo sobre efecto invernadero	Mayor desarrollo covariacional en las aulas de intervención frente a la comparación.
Li et al. (2022)	China; 7.º; n = 82	Pretest, posttest, cuestionario y entrevistas; realidad aumentada	Mayor fluidez entre situaciones, símbolos y gráficas de funciones lineales.
Kafetzopoulos y Psycharis (2022)	Grecia; 11.º; trabajo en parejas	Trayectoria de modelación con herramientas digitales	Desarrollo de una concepción dinámica de función y de razonamiento cuantitativo-covariacional.
Jaber et al. (2023)	Estudiantes de 15-17 años; n = 18	Investigación basada en diseño; dos ciclos de realidad aumentada	El rediseño de consignas y retroalimentación promovió formas más elaboradas de covariación.
Bagossi y Swidan (2023)	10.º; experimento escolar; n no informado	Comparación del mismo experimento en GeoGebra y realidad aumentada	Cada ambiente distribuyó la atención y la covariación de segundo orden de forma distinta.
Digel et al. (2023)	Alemania; secundaria inferior; ocho grupos focales	Experimentos digitales con condiciones de correspondencia y covariación	La condición covariacional favoreció argumentos dinámicos.
Bagossi (2024)	Italia; 11.º; n = 22	Experimento de enseñanza; carta psicométrica y GeoGebra	Coordinación de cambios de primer y segundo orden entre tres cantidades.
González-Polo y Castaneda (2024)	México rural; bachillerato; n = 21	Caída libre; video, Tracker, GeoGebra y Wolfram Alpha	La coordinación video-tabla-gráfica cuestionó supuestos lineales; persistió dificultad algebraica.

Jaber et al. (2024)	11.º; tres estudiantes	Análisis cualitativo de episodios en realidad aumentada	La conexión real-virtual apoyó relaciones y familias funcionales.
Wei et al. (2024)	Países Bajos; 8.º; piloto; n = 4	Diseño corporal con pantalla multitáctil y nomograma digital	El movimiento bimanual enlazó experiencia corporal, nomograma y gráfica.
Núñez-Gutiérrez et al. (2025)	Colombia; 9.º; n = 37	Investigación de diseño; laboratorio multimodal de ocho actividades	Progresos en función, tabla y gráfica; mayor dificultad al pasar de gráfica a álgebra.
Wei et al. (2025)	Países Bajos; 9.º; n = 39; tres sesiones	Intervención con nomogramas, tactilidad y tareas digitales	Avances en pensamiento funcional apoyados por discusión colectiva.
Karavakou y Kynigos (2026)	Grecia; 11.º; n = 23	GeoGebra y MaLT2; animaciones periódicas asociadas con música	Comprensión dinámica de amplitud, periodo, monotonía y tasa local.
Wei et al. (2026)	Países Bajos; 9.º; n = 76; tres lecciones	Seguimiento de manos, tareas digitales y medidas pre-post	Progresos covariacionales mediante ciclos de percepción, acción y retroalimentación.

Nota. Elaboración propia a partir de los estudios incluidos.

Tabla 3.

Principios teórico-didácticos derivados de la síntesis

Principio	Fundamento operativo	Expresión en la práctica
1. Intencionalidad matemática	Seleccionar la tecnología por la relación variacional que permite percibir, manipular y explicar.	Objetivo observable y preguntas por cantidades, dirección, magnitud y tasa.
2. Coordinación representacional	Relacionar fenómeno, acción, lenguaje, tabla, gráfica y expresión sin asumir conversiones automáticas.	Predicción, manipulación, contraste y justificación de cada conversión.
3. Modelación contextual	Organizar la actividad alrededor de fenómenos comprensibles y matemáticamente productivos.	Movimiento, crecimiento, llenado, temperatura, sonido o datos locales.
4. Exploración guiada	Combinar autonomía, retroalimentación y preguntas que dirijan la atención hacia la covariación.	Pausas de explicación, comparación de conjeturas, revisión y discusión colectiva.
5. Progresión conceptual	Avanzar desde dirección y cambio cualitativo hacia tasas, variabilidad y generalización algebraica.	Tareas graduadas y evaluación de capacidades covariacionales diferenciadas.
6. Viabilidad y equidad	Ajustar la mediación a conectividad, equipos, tiempo, accesibilidad y conocimiento docente.	Alternativas fuera de línea, trabajo colaborativo, préstamo rotativo y formación acompañada.

Nota. Los principios integran recurrencias del corpus con las necesidades de instituciones que presentan disponibilidad tecnológica desigual.

Coordinación dinámica de representaciones

Un hallazgo recurrente en los estudios analizados fue la capacidad de las mediaciones hipermediales para favorecer la coordinación entre el fenómeno observado, la acción realizada por el estudiante, las representaciones tabulares, las gráficas y las expresiones algebraicas dentro de una misma experiencia de aprendizaje. En esta dirección, Li et al. (2022) evidenciaron que la realidad aumentada

promovió una transición más fluida entre situaciones contextualizadas, representaciones simbólicas y gráficas, mientras que González-Polo y Castaneda (2024) mostraron que el videoanálisis permitió confrontar hipótesis iniciales de carácter lineal con los datos obtenidos durante el estudio de una caída libre, propiciando la revisión y reformulación de las interpretaciones construidas por los estudiantes.

No obstante, la coexistencia de múltiples representaciones no condujo por sí misma a una comprensión más profunda del fenómeno

matemático. Los resultados convergieron en señalar que los aprendizajes más sólidos surgieron cuando las actividades exigieron anticipar comportamientos, manipular una cantidad, analizar las transformaciones producidas, justificar las relaciones observadas y revisar las respuestas a partir de la evidencia obtenida. Por el contrario, cuando la transición hacia el lenguaje algebraico se produjo de manera prematura, las tablas y las gráficas tendieron a convertirse en productos terminados, desvinculados del proceso dinámico de variación que buscaban representar.

Esta interpretación también encuentra respaldo en los trabajos de Ordóñez-Ortega et al. (2019), quienes evidenciaron la complementariedad entre las baldosas algebraicas y los manipuladores virtuales. Mientras la manipulación física favoreció el reconocimiento de regularidades, la representación digital permitió reiterar procedimientos, verificar resultados y comunicar las transformaciones realizadas. En una dirección similar, Nuñez-Gutierrez et al. (2025) identificaron avances consistentes en la articulación entre funciones, tablas y representaciones gráficas, aunque señalaron que la conversión desde la representación gráfica hacia la expresión algebraica continuó constituyendo uno de los desafíos cognitivos de mayor complejidad.

Modelación de fenómenos y razonamiento covariacional

La modelación de fenómenos reales constituyó otro de los ejes predominantes en las investigaciones revisadas, al proporcionar un contexto significativo para coordinar cantidades en transformación y establecer relaciones funcionales. Basu y Panorkou (2019), mediante la integración de simulaciones desarrolladas en NetLogo con contenidos de ciencias ambientales, evidenciaron que los estudiantes construyeron formas más elaboradas de razonamiento

covariacional al explicar el comportamiento simultáneo de diferentes variables asociadas con el efecto invernadero. En este caso, la modelación trascendió la representación gráfica para convertirse en un proceso de interpretación de fenómenos complejos.

De manera complementaria, Kafetzopoulos y Psycharis (2022) demostraron que una secuencia de modelación cuidadosamente estructurada favoreció la comprensión de la función como una relación dinámica entre cantidades, desplazando la atención desde la aplicación mecánica de fórmulas hacia el análisis de las dependencias funcionales. Esta perspectiva fue ampliada por Bagossi (2024), quien empleó la carta psicrométrica para estudiar las relaciones entre temperatura, humedad absoluta y humedad relativa. La complejidad de esta representación obligó a coordinar variaciones de distinto orden y a interpretar simultáneamente múltiples cantidades, fortaleciendo procesos avanzados de razonamiento covariacional.

En esta misma línea, Karavakou y Kynigos (2026) incorporaron una dimensión estética al integrar GeoGebra y MaLT2 para sincronizar animaciones periódicas con composiciones musicales. La modificación deliberada de parámetros como amplitud, período, monotonía y tasa de cambio permitió que los estudiantes interpretaran dichos parámetros como propiedades de comportamientos dinámicos y no únicamente como elementos de una expresión algebraica, ampliando las posibilidades de modelación más allá de los problemas escolares tradicionales.

Corporalidad, realidad aumentada y retroalimentación

Los estudios centrados en interfaces corporales coincidieron en atribuir al movimiento un papel relevante dentro de la construcción del pensamiento variacional. Más que constituir un recurso complementario, la acción corporal funcionó como un medio para representar relaciones entre cantidades y hacer

visibles procesos que habitualmente permanecen implícitos durante la resolución de tareas matemáticas. En este contexto, Wei et al. (2024) observaron que el control bimanual de cantidades mediante un nomograma digital favoreció la articulación entre acción, representación gráfica e interpretación matemática. Posteriormente, Wei et al. (2025) confirmaron la viabilidad de esta propuesta en un grupo de 39 estudiantes y destacaron que la discusión colectiva resultó determinante para consolidar las generalizaciones construidas durante la interacción.

La importancia del componente corporal se fortaleció con el estudio basado en seguimiento de manos desarrollado por Wei et al. (2026). Sus resultados mostraron avances en el razonamiento covariacional y explicaron dichos progresos a partir de ciclos continuos de percepción, acción y retroalimentación. En consecuencia, el movimiento permitió hacer observable la coordinación simultánea de cantidades, orientar la atención hacia relaciones matemáticas relevantes y convertir las acciones ejecutadas por los estudiantes en objetos de análisis susceptibles de explicación, contraste y revisión.

Por su parte, la realidad aumentada facilitó la integración entre fenómenos físicos y representaciones digitales, aunque también introdujo nuevas exigencias perceptivas y cognitivas. Los ciclos de diseño reportados por Jaber et al. (2023) evidenciaron que las consignas precisas y la retroalimentación permanente favorecieron el desplazamiento de la atención desde el atractivo visual de la tecnología hacia las relaciones cuantitativas involucradas en la tarea. Esta interpretación fue profundizada posteriormente por Jaber et al. (2024), quienes mostraron, mediante el análisis detallado de tres estudiantes, cómo dicha articulación contribuyó a comprender relaciones funcionales y familias de funciones.

Mediación docente y condiciones de implementación

La síntesis de la evidencia indicó que los resultados más consistentes se alcanzaron cuando las posibilidades ofrecidas por las tecnologías digitales se integraron con una mediación docente sistemática e intencional. Las preguntas orientadas a identificar qué cantidad cambia, en qué dirección ocurre esa variación, cuál es su ritmo y cómo se refleja en la representación gráfica favorecieron la construcción de explicaciones fundamentadas, mientras que los espacios destinados a contrastar conjeturas, discutir procedimientos y revisar errores fortalecieron la consolidación del conocimiento matemático.

Desde el punto de vista didáctico, las intervenciones compartieron una progresión relativamente estable. Habitualmente iniciaron con la identificación de procesos de aumento y disminución, avanzaron hacia la coordinación de cambios simultáneos y el análisis de tasas constantes o variables, y culminaron con la formulación de generalizaciones expresadas mediante representaciones gráficas y algebraicas. Aunque el trabajo de Pittalis y Sajka (2026) no hizo parte del corpus empírico, su propuesta teórica permitió interpretar estos resultados al distinguir entre dirección del cambio, tasa constante, discernimiento de tasas y conciencia de la variabilidad como niveles progresivos del razonamiento covariacional.

Finalmente, las investigaciones revisadas mostraron que la disponibilidad permanente de conexión a internet no constituye una condición indispensable para implementar este tipo de propuestas. Herramientas como GeoGebra instalado localmente, hojas de cálculo, videos previamente descargados y manipuladores virtuales pueden utilizarse sin conectividad continua. En contraste, las experiencias basadas en realidad aumentada y seguimiento corporal demandan dispositivos compatibles, procesos de calibración, espacios adecuados y apoyo técnico especializado.

Discusión

La evidencia sintetizada permite sostener que las mediaciones hipermediales favorecen el desarrollo del pensamiento variacional cuando hacen explícitas las relaciones entre cantidades en transformación, preservan la coherencia entre diferentes sistemas de representación y promueven la explicación de los cambios observados durante la actividad matemática. Desde esta perspectiva, su potencial educativo no reside en la incorporación simultánea de múltiples recursos tecnológicos, sino en la capacidad de integrar imagen, movimiento, datos, representaciones gráficas y simbolización dentro de una secuencia didáctica que otorgue significado matemático a cada uno de estos elementos y los articule alrededor de una pregunta cuya resolución exija interpretar procesos de variación.

Esta interpretación converge con la propuesta de Duval (2006), quien distingue entre tratamiento y conversión de registros semióticos como procesos esenciales para la comprensión matemática. Los resultados de la revisión indican que el aprendizaje se fortalece cuando el estudiante identifica qué propiedades permanecen invariantes al transitar entre diferentes representaciones y comprende cómo cada una aporta información complementaria sobre un mismo fenómeno. En este escenario, los entornos dinámicos introducen una ventaja adicional al proporcionar retroalimentación inmediata, permitiendo que una modificación realizada sobre una representación se refleje simultáneamente en tablas, gráficas y expresiones algebraicas.

La síntesis también respalda la distinción propuesta por Thompson y Carlson (2017) entre reconocer pares aislados de valores y comprender cantidades que varían de manera coordinada. En las investigaciones con mayores niveles de logro, las tareas invitaron a anticipar el comportamiento de las variables antes de examinar valores discretos, comparar diferentes ritmos de cambio y explicar cómo una variación

influyó sobre otra a medida que el fenómeno evolucionaba. Esta secuencia favoreció una comprensión progresiva de la covariación y evitó que las representaciones gráficas fueran interpretadas como imágenes estáticas desvinculadas de los procesos que las originan.

En relación con las interfaces corporales, los resultados muestran que el movimiento constituye un recurso cognitivo capaz de ampliar las posibilidades de razonamiento matemático. La teoría cultural de la objetivación propuesta por Radford (2006) ofrece un referente pertinente para interpretar este hallazgo, al comprender el aprendizaje como un proceso distribuido entre percepción, gesto, lenguaje y uso de artefactos culturales. En consecuencia, acciones como el movimiento bimanual o el seguimiento de las manos permiten hacer visible la construcción de una curva y facilitar la comprensión de relaciones dinámicas. Sin embargo, la revisión también evidencia que esta experiencia corporal requiere complementarse con procesos de verbalización, confrontación entre pares y mediación docente para favorecer la transición hacia formas de representación progresivamente más abstractas.

La realidad aumentada amplía las posibilidades de vincular fenómenos físicos con representaciones digitales; sin embargo, su incorporación también introduce nuevas exigencias perceptivas que pueden interferir con la actividad matemática cuando el diseño didáctico resulta insuficiente. En este sentido, los estudios desarrollados por Jaber et al. (2023, 2024) muestran que variables como la secuencia de presentación de los elementos, la precisión de las consignas y la calidad de la retroalimentación condicionan la forma en que los estudiantes orientan su atención. De ello se desprende que la eficacia de estas tecnologías depende menos de sus prestaciones técnicas que de la estructura pedagógica que organiza la experiencia de aprendizaje.

Desde una perspectiva de implementación, GeoGebra, el videoanálisis y los manipuladores virtuales representan alternativas especialmente prometedoras debido al equilibrio que ofrecen entre potencial matemático, accesibilidad y viabilidad institucional. Estas herramientas facilitan la articulación entre diferentes representaciones, permiten capturar información proveniente de fenómenos próximos al contexto escolar y pueden utilizarse sin requerir conectividad permanente. No obstante, la revisión muestra que su efectividad depende de la existencia de tareas que orienten la manipulación hacia la formulación y comprobación de conjeturas, de manera que acciones como arrastrar objetos, medir magnitudes o modificar parámetros respondan a propósitos matemáticos claramente definidos y culminen en procesos de explicación y argumentación.

La distribución geográfica de la producción científica también aporta elementos relevantes para la interpretación de los hallazgos. Mientras las investigaciones desarrolladas en Colombia y México se concentran principalmente en proyectos de investigación-acción, laboratorios escolares y recursos tecnológicos de amplia disponibilidad, los estudios procedentes de Europa, China e Israel incorporan con mayor frecuencia realidad aumentada, sensores e interfaces corporales. Estas diferencias aconsejan analizar la transferencia de las experiencias desde criterios relacionados con la infraestructura disponible, la formación del profesorado, los costos de implementación y las condiciones de sostenibilidad institucional, evitando la reproducción directa de propuestas concebidas para contextos sustancialmente diferentes.

Los resultados también ponen de manifiesto que la formación docente constituye un factor determinante para el aprovechamiento de estas mediaciones. En consonancia con la concepción de los saberes profesionales desarrollada por Tardif (2004), la preparación del profesorado no puede reducirse al dominio

instrumental de aplicaciones informáticas, sino que debe integrar conocimiento matemático, diseño de tareas, interpretación de producciones estudiantiles y conducción del diálogo en el aula. Desde esta perspectiva, adquieren especial relevancia los procesos de planificación compartida, observación de clases, análisis colaborativo de evidencias y rediseño progresivo de las propuestas didácticas como estrategias para fortalecer la toma de decisiones pedagógicas.

Conclusiones

La revisión responde a la pregunta planteada mediante una conclusión convergente: las mediaciones hipermediales pueden fortalecer el pensamiento variacional en secundaria cuando permiten actuar sobre dos o más cantidades, observar sus cambios coordinados y justificar la relación mediante representaciones enlazadas. GeoGebra, realidad aumentada, videoanálisis, manipuladores virtuales y ambientes corporales mostraron posibilidades educativas, condicionadas por la tarea y la actuación docente.

Los aprendizajes con mayor respaldo fueron la identificación de dirección y tasa de cambio, la construcción e interpretación de gráficas, la fluidez entre representaciones y la modelación funcional. La conversión hacia expresiones algebraicas y el razonamiento sobre tasas variables mantuvieron mayor complejidad, resultado que demanda secuencias más prolongadas, momentos de verbalización y evaluaciones capaces de reconocer procesos intermedios.

Los seis principios derivados —intencionalidad matemática, coordinación representacional, modelación contextual, exploración guiada, progresión conceptual y viabilidad equitativa— ofrecen una base para diseñar y valorar experiencias institucionales. En Puente Nacional, su aplicación puede comenzar con un diagnóstico de recursos y saberes docentes, continuar con tareas vinculadas con fenómenos locales y apoyarse

en comunidades de práctica que revisen evidencias del aprendizaje.

La investigación futura debe desarrollar estudios longitudinales, comparaciones entre mediaciones y réplicas latinoamericanas que describan con precisión infraestructura, actuación docente y trayectorias de estudiantes diversos. También conviene examinar la transferencia desde acciones corporales y gráficas hacia generalizaciones algebraicas, junto con el costo pedagógico y técnico de cada alternativa, para sustentar decisiones institucionales viables.

Agradecimientos

El autor agradece a la Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Instituto Pedagógico de Caracas, y a las comunidades educativas de Puente Nacional, Santander, cuya experiencia motiva la línea investigativa.

Conflicto de intereses. El autor declara que no existen conflictos de intereses.

Financiación. El trabajo no recibió financiación externa.

Referencias

Bagossi, S. (2024). Engaging in covariational reasoning when modelling a real phenomenon: The case of the psychometric chart. *Bollettino dell'Unione Matematica Italiana*, 17, 199-220. <https://doi.org/10.1007/s40574-023-00375-7>

Bagossi, S., & Swidan, O. (2023). Learning second-order covariation with GeoGebra and augmented reality. *International Journal for Technology in Mathematics Education*, 30(4), 213-218. https://doi.org/10.1564/tme_v30.4.2

Basu, D., & Panorkou, N. (2019). Integrating covariational reasoning and technology into the teaching and learning of the greenhouse effect. *Journal of Mathematics Education*, 12(1), 6-23. <https://doi.org/10.26711/007577152790035>

Clark-Wilson, A., Robutti, O., & Thomas, M. (2020). Teaching with digital technology. *ZDM-Mathematics Education*, 52, 1223-1242. <https://doi.org/10.1007/s11858-020-01196-0>

Digel, S., Bolz, L., & Roth, J. (2023). The effects of covariational reasoning on conceptual learning of functions with digital-enhanced experiments. In P. Drijvers, C. Csapodi, H. Palmér, K. Gosztonyi, & E. Kónya (Eds.), *Proceedings of the Thirteenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2921-2928). Alfréd Rényi Institute of Mathematics and ERME.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61, 103-131. <https://doi.org/10.1007/s10649-006-0400-z>

González-Polo, R. I., & Castaneda, A. (2024). Progressive mathematics of functions in secondary school students using a free-fall activity. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 19(1), em0765. <https://doi.org/10.29333/iejme/14108>

Hong, Q. N., Fàbregues, S., Bartlett, G., Boardman, F., Cargo, M., Dagenais, P., Gagnon, M.-P., Griffiths, F., Nicolau, B., O'Cathain, A., Rousseau, M.-C., & Pluye, P. (2018). *Mixed Methods Appraisal Tool (MMAT)*, version 2018. McGill University. <https://mixedmethodsappraisaltoolpublic.pbworks.com/>

Jaber, O., Bagossi, S., Fried, M. N., & Swidan, O. (2024). Conceptualizing functional relationships in an augmented reality environment: Connecting real and virtual worlds. *ZDM-Mathematics Education*, 56, 605-623. <https://doi.org/10.1007/s11858-024-01594-8>

Jaber, O., Swidan, O., & Fried, M. N. (2023). Design considerations in developing an augmented reality learning environment for

- engaging students in covariational reasoning. *International Journal of Emerging Technologies in Learning*, 18(11), 52-73.
<https://doi.org/10.3991/ijet.v18i11.38923>
- Kafetzopoulos, G.-I., & Psycharis, G. (2022). Conceptualization of function as a covariational relationship between two quantities through modeling tasks. *The Journal of Mathematical Behavior*, 67, 100993.
<https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2022.100993>
- Karavakou, M., & Kynigos, C. (2026). Choreographing periodic functions: Aesthetically driven covariational reasoning. *Educational Studies in Mathematics*. Advance online publication. <https://doi.org/10.1007/s10649-026-10521-5>
- Li, S., Shen, Y., Jiao, X., & Cai, S. (2022). Using augmented reality to enhance students' representational fluency: The case of linear functions. *Mathematics*, 10(10), 1718.
<https://doi.org/10.3390/math10101718>
- Martínez-López, L. G., & Gualdrón-Pinto, E. (2018). Fortalecimiento del pensamiento variacional a través de una intervención mediada con TIC en estudiantes de grado noveno. *Revista de Investigación, Desarrollo e Innovación*, 9(1), 91-102.
<https://doi.org/10.19053/20278306.v9.n1.2018.8156>
- Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Lineamientos curriculares: Matemáticas*. Magisterio.
- Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas*. Ministerio de Educación Nacional.
- Nuñez-Gutierrez, K., Rodríguez-Nieto, C. A., Correa-Sandoval, L., & Font Moll, V. (2025). High school Colombian students' variational thinking triggered by mathematical connections in a laboratory on linear functions. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 20(1), em0800.
<https://doi.org/10.29333/iejme/15649>
- Ordóñez-Ortega, O., Gualdrón-Pinto, E., & Amaya-Franky, G. (2019). Pensamiento variacional mediado con baldosas algebraicas y manipuladores virtuales. *Revista de Investigación, Desarrollo e Innovación*, 9(2), 347-362.
<https://doi.org/10.19053/20278306.v9.n2.2019.9180>
- Page, M. J., McKenzie, J. E., Bossuyt, P. M., Boutron, I., Hoffmann, T. C., Mulrow, C. D., Shamseer, L., Tetzlaff, J. M., Akl, E. A., Brennan, S. E., Chou, R., Glanville, J., Grimshaw, J. M., Hróbjartsson, A., Lalu, M. M., Li, T., Loder, E. W., Mayo-Wilson, E., McDonald, S., ... Moher, D. (2021). The PRISMA 2020 statement: An updated guideline for reporting systematic reviews. *BMJ*, 372, n71.
<https://doi.org/10.1136/bmj.n71>
- Pittalis, M., & Sajka, M. (2026). Reasoning abilities in covariational functional thinking: An empirically validated framework for Grade 8-10 students. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 24, Article 44. <https://doi.org/10.1007/s10763-026-10661-3>
- Radford, L. (2006). Elementos de una teoría cultural de la objetivación. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 9(número especial), 103-129.

- Rethlefsen, M. L., Kirtley, S., Waffenschmidt, S., Ayala, A. P., Moher, D., Page, M. J., & Koffel, J. B. (2021). PRISMA-S: An extension to the PRISMA statement for reporting literature searches in systematic reviews. *Systematic Reviews*, 10, Article 39. <https://doi.org/10.1186/s13643-020-01542-z>
- Tardif, M. (2004). Los saberes del docente y su desarrollo profesional. Narcea.
- Thompson, P. W., & Carlson, M. P. (2017). Variation, covariation, and functions: Foundational ways of thinking mathematically. In J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (pp. 421-456). National Council of Teachers of Mathematics.
- Wei, H., Bos, R., & Drijvers, P. (2024). Developing functional thinking: From concrete to abstract through an embodied design. *Digital Experiences in Mathematics Education*, 10, 323-351. <https://doi.org/10.1007/s40751-024-00142-z>
- Wei, H., Bos, R., & Drijvers, P. (2025). A digital-embodied design for functional thinking in the classroom. *Mathematical Thinking and Learning*, 1-31. Advance online publication. <https://doi.org/10.1080/10986065.2025.2493375>
- Wei, H., Bos, R., & Drijvers, P. (2026). An embodied approach to covariational reasoning: A hand-tracking study. *Educational Studies in Mathematics*, 121, 119-142. <https://doi.org/10.1007/s10649-025-10435-8>